Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 7

Series; el número de Euler.

Fecha de entrega: 12 de marzo de 2026

---

1. **El número de Euler e.** Para $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y $s_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

   (a) Muestre que las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen.

   (b) Muestre que $\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

2. ¿Convergen las siguientes series? Pruebe sus respuestas.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ donde $a \in \mathbb{R}$,

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n$, donde $b_{2m} := \frac{1}{(2m)^2}$, $b_{2m+1} = -\frac{1}{2m}$.

3. (a) Para $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ y $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Muestre que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge.

   (b) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión monotónicamente decreciente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en $\mathbb{R}$. Muestre que

   $$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0.$$

4. (a) Para una sucesión decreciente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ muestre

   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n} \text{ converge.}$$

   (b) Determine si las series $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (n \log_2 n)^{-1}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ convergen. Prueba! (Utilice sus conocimientos aprendidos en los cursos de cálculo sobre la función logaritmo.)