

Análisis

Taller 6

Puntos de acumulación; $\limsup$, $\liminf$.

Fecha de entrega: 05 de marzo de 2026

1. Sean $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos en $\mathbb{R}$ con $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Muestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.

2. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Muestre:

- (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ = el punto de acumulación más grande de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ = el punto de acumulación más pequeño de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. (a) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y defina sucesiones $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ por

$$y_k := \sup\{x_n : n \geq k\}, \quad z_k := \inf\{x_n : n \geq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Muestre que $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergen en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \limsup x_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \liminf x_n.$$

- (b) Encuentre una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \liminf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \limsup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

¿Debe $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tener un máximo en este caso?

4. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado y para $n \in \mathbb{N}$ defina $b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$.

Muestre o encuentre un contraejemplo:

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\implies (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
(b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5. **Voluntario.** Muestre que en $\mathbb{R}$ (un campo ordenado que es extensión del campo ordenado $\mathbb{Q}$), lo siguiente es equivalente.

- (a) Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge (es decir, $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo).
(b) $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.
(c) $\mathbb{R}$ satisface la propiedad del ejercicio 1.

6. **Voluntario.** Muestre o encuentre un contraejemplo para las siguientes afirmaciones.

- (a) Una sucesión de números reales converge si y solo si tiene exactamente un punto de acumulación.
(b) En un espacio normado, toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación.
(c) En un espacio de normado, una sucesión acotada es convergente si y solo si tiene exactamente un punto de acumulación.