

Análisis

Taller 5

Sucesiones.

Fecha de entrega: 26 de febrero de 2026

1. Sea X un conjunto no vacío y sea

$$L_\infty(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} : \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty \right\}$$

y para $f \in L_\infty(X)$ defina

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Demuestre que $(L_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado.

2. (a) Sea $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Demuestre que $\sum_{j=0}^k c^j = \frac{1-c^{k+1}}{1-c}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

- (b) Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ tal que exista un $c \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \quad x, y \in X.$$

Demuestre que existe exactamente un $z \in X$ tal que $f(z) = z$.

3. La sucesión de Fibonacci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sean $\sigma < \tau$ las soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$ y

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Muestre que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge en $\mathbb{R}$.

- (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+1} - \sigma^{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$

- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tau.$

4. Si existe, encuentre el valor de

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

es decir, el límite de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde

$$x_1 := 1 \quad \text{and} \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1.$$