

Análisis

Taller 4

Espacios normados; sucesiones.

Fecha de entrega: 19 de febrero de 2026

1. (a) Sea (X, d) , $X \neq \emptyset$, un espacio métrico y sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X .
Muestre: Si existe $a \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

¿Se tiene el otro sentido (prueba o contraejemplo)?

- (b) Sea (X, d) un espacio métrico y $\varrho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una biyección. Muestre: Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ converge, luego $(x_{\varrho(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ converge y tiene el mismo límite.
La sucesión $(x_{\varrho(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ se llama un *reordenamiento* de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

¿Las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas?

- (i) Si todo reordenamiento de una sucesión converge, la sucesión misma converge.
(ii) Si un reordenamiento de una sucesión converge, la sucesión misma converge.
2. (a) Sea $x_n = \sqrt{1 + n^{-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Muestre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.
(b) Convergen los siguientes sucesiones en $\mathbb{R}$? En el caso de convergencia, halle el límite.
Pruebe sus afirmaciones.
- (I) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$,
(II) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $b_n = \sqrt{1 + n^{-1} + n^{-2}}$, $n \in \mathbb{N}$,
(III) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $d_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$, $n \in \mathbb{N}$,
3. Sea $q \in \mathbb{R}_+$ y $x_n := \sqrt[n]{q}$, $y_n := \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Convergen las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
Si es así, encuentre el límite.
4. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Muestre o encuentre un contraejemplo:

- (I) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$ tal
que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N,$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

- (II) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q \leq 1$ tal
que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N,$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.