

Análisis

Taller 3

Least upper bound property; números complejos;
espacios métricos.

Fecha de entrega: 12 de febrero de 2026

1. (a) Para todo $x \in \mathbb{R}_+$ existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $n \leq x < n + 1$ (vea Proposición 3.19).
(b) Todo intervalo en $\mathbb{R}$ con por lo menos dos puntos diferentes contiene un número racional. (Proposición 3.20)
(c) $\mathbb{Q}$ no tiene la *least upper bound property*.

2. (a) Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ y $\xi \in \mathbb{R}$ una cota superior de X . Muestre que

$$\xi = \sup X \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists x_\varepsilon \in X \quad \xi - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \xi.$$

Formule la afirmación análoga para $\inf X$.

- (b) Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos tal que

$$\forall x \in X \exists y \in Y : y < x.$$

¿Se sigue que $\inf Y < \inf X$? Pruebe su afirmación.

3. (a) Muestre que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existen exactamente dos números $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ tal que $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = z$.
(b) Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Muestre que existe por lo menos un $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$az^2 + bz + c = 0.$$

4. Sea (X, d) , $X \neq \emptyset$, un espacio métrico y $M \subseteq X$. Muestre que lo siguiente es equivalente:

- (i) M es acotado.
- (ii) $\exists x \in X \exists r > 0 : M \subseteq B_r(x)$.
- (iii) $\forall x \in X \exists r > 0 : M \subseteq B_r(x)$.

5. **Problema voluntario.** Encuentre un campo ordenado sin la propiedad arquimedea.