Universidad de los Andes
MATE-2201

Analysis 1

Taller 2

Campos ordenados; supremo y ínfimo. Fecha de entrega: 25 de agosto de 2023

Recuerde que debe probar todas sus afirmaciones. ,p

1. Para la solución de este ejercicio puede suponer que ya sabemos que todo subconjunto de un conjunto contable es contable o finito y que la unión contable de conjuntos contables es contable.
   (a) Muestre que el producto directo de conjuntos contables es contable.
   (b) Encuentre una biyección $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   (c) Muestre que $\mathbb{Q}$ es contable.

2. (a) Muestre que el conjunto de potencias $\mathbb{P}\mathbb{N}$ no es contable.
   (b) Sean A, B conjuntos. Muestre o encuentre un contraejemplo:
      (i) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}A \cap \mathbb{P}B$.
      (ii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}A \cup \mathbb{P}B$.

3. Sea $(K, +, \cdot, >)$ un campo ordenado y sean a, x, x', y, $y' \in K$. Pruebe lo siguiente (vea Corolario 3.9 en las notas de clase). Justifique cada paso.
   (iii) $x < y \implies x + a < y + a$,
   (iv) $x < y \ \wedge\ x' < y' \implies x + x' < y + y'$,
   (v) $x < y \ \wedge\ a > 0 \implies a \cdot x < a \cdot y$,
   $x < y \ \wedge\ a < 0 \implies a \cdot x > a \cdot y$,
   (vi) $0 \leq x < y \ \wedge\ 0 \leq x' < y' \implies 0 \leq x' \cdot x < y' \cdot y$,
   (x) $0 < x < y \implies 0 < y^{-1} < x^{-1}$,
   (xi) $x > 0 \wedge y < 0 \implies xy < 0$.

Para el siguente ejercicio puede usar que existe un único campo ordenado $\mathbb{R}$ que contiene $\mathbb{N}_0$, satisface los axiomas de orden (OA1), (OA2), (OA3) y que tiene la propiedad de la mínima cota superior. (Mejor esperar hasta la clase el lunes.)

---

4. Encuentre el ínfimo y el supremo de los conjuntos in el campo ordenado $\mathbb{R}$. Determine si tienen máximo y/o mínimo.
   (a) $\{x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} \ \ x = n^2\}$,
   (b) $\left\{ \dfrac{|x|}{1 + |x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$,
   (c) $\left\{x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} \ \ x = \dfrac{1}{n} + n\big(1 + (-1)^n\big)\right\}$,
   (d) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\right\} \cap \mathbb{Q}$.