Universidad de los Andes
MATE-2201

Analysis 1

Taller 1

Inducción.

Fecha de entrega: 29 de enero de 2026

---

1. Sean X, Y, Z conjuntos y sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas y pruebe su afirmación.

   (a) f inyectiva $\implies$ $g \circ f$ inyectiva,

   (b) g inyectiva $\implies$ $g \circ f$ inyectiva,

   (c) $g \circ f$ inyectiva $\implies$ f inyectiva,

   (d) $g \circ f$ inyectiva $\implies$ g inyectiva,

   (e) Suponga que g es inyectiva. Entonces f inyectiva $\iff$ $g \circ f$ inyectiva.

   (f) Suponga que f es sobreyectiva. Entonces g sobreyectiva $\iff$ $g \circ f$ sobreyectiva.

   Voluntario: Haga (a) – (d) pero con "inyectiva" reemplazado por "sobreyectiva".

2. Muestre las siguientes fórmulas y desigualdades:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2, \quad n \in \mathbb{N},$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\ , \quad n \in \mathbb{N}.$

3. Muestre las siguientes fórmulas y desigualdades:

   (a) $2^n \leq n!$ para $n \geq 4$.

   (b) Demuestre que 13 es divisor de $3^{n+2} + 4^{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

4. Para $n \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{N}$ sea

$$a(m,n) := \#\Big\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}_0^m \ :\ \sum_{j=1}^{m} x_j \leq n\Big\},$$

$$b(m,n) := \#\Big\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}_0^m \ :\ \sum_{j=1}^{m} x_j = n\Big\}.$$

   (a) Muestre que $a(m,n) = b(m+1,n)$, $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Muestre que $a(m,n) = \dbinom{n+m}{m}$, $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0$.

   Hint: Muestre que $a(m,n-1) + a(m-1,n) = a(m,n)$ y use inducción en $n+m$.

5. **Voluntario.** Sea $(M, <)$ un conjunto totalmente ordenado y sea $N \subseteq M$.

(a) Si N tiene un máximo, es único.

(b) Si N tiene un mínimmo, es único.

(c) Si N tiene un supremo, es único.

(d) Si N tiene un infimo, es único.

(e) Si N tiene un máximo entonces también tiene un supremo y $\max N = \sup N$.

(f) Si N tiene un mínimmo, entonces también tiene un ínfimo y $\min N = \inf N$.