Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 15

Series de Taylor. Fecha de entrega: 01 de diciembre de 2023

---

1. (a) Calcule la serie de Taylor de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ centrada en 4. ¿La serie coincide con la función f dentro de su intervalo de convergencia?
   (b) Calcule la serie de Taylor de $g(x) = x^2(x-4)^2$ centrada en 4. ¿La serie coincide con la función g dentro de su intervalo de convergencia?
   (c) Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 de $h(x) = \dfrac{\sin(x^3)}{1-x}$ centrada en 0.
   (d) Calcule el polinomio de Taylor de grado 4 de $k(x) = \dfrac{(\cos x)^2}{1-\sin(x^2)}$ centrada en 0.

2. (a) Sea $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(x) = -\log(\cos x)$. Muestre que
$$\left| f(x) - \frac{x^2}{2} \right| \ \le\ \frac{2}{3}\,|x|^3, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$
   (b) Sin usar la regla de l'Hospital, calcule
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x) - x^3}{(\mathrm{e}^x - 1)(1-\cos(x^2))}.$$

3. Muestre que las siguientes funciones son infinitamente derivables y encuentre sus series de Taylor centradas en 0. Halle los radios de convergencia y determine donde las funciones son iguales a sus series de Taylor.
   (a) $$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
   (b) $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}.$$

4. Si $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces
$$\lim_{t\to 0} \int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 + x^2}\, f(x)\,\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

5. **Ejercicio de escritura. Quinto ejercicio de reflexión**. En Bloque Neón, argumente en un ***único párrafo, honesto, coherente y conciso*** si el curso de Análisis debería seguir siendo un curso de tipo E. Es decir, debe justificar por qué sí, o por qué no, el curso de Análisis debe continuar siendo un curso tipo E?