Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 13

Diferenciación. Regla de l'Hôpital. Fecha de entrega: 17 de noviembre de 2023

---

1. Halle los siguientes límites si existen:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$, (b) $\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^a$ con $x\in\mathbb{R}$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arctan x)^{1/x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^a}-\dfrac{b}{1-x^b}\right)$ con $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2. Sea $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalo y $f:I\to\mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Demuestre:
$$f \text{ es convexa} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f''\geq 0.$$

3. (a) Sean $s,p,q>1$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{s}$. Sean $x=(x_j)_{j=1}^n,\ y=(y_j)_{j=1}^n\in\mathbb{K}^n$ y defina $z=(x_jy_j)_{j=1}^n\in\mathbb{K}^n$. Demuestre que
$$\|z\|_s\leq\|x\|_p\|y\|_q.$$
   (b) Sea $p\geq 1$. Encuentre todos los $q\geq 1$ tal que $\ell_p(\mathbb{N})\subseteq\ell_q(\mathbb{N})$.[1]

4. Existe $\displaystyle\int_0^1 D(t)\mathrm{d}t$, donde D es la función de Dirichlet
$$D:[0,1]\to\mathbb{R},\quad D(t)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\\ 0 & \text{si } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$
   (Recuerda que por definición la integral $\displaystyle\int_0^1 D(t)\mathrm{d}t$ existe si y solo si $\displaystyle\int_{0*}^1 D(t)\mathrm{d}t=\int_0^{1*} D(t)\mathrm{d}t$.)

5. **Ejercicio de escritura. Cuarto ejercicio de reflexión (primera parte)**. En un ***único párrafo, coherente y conciso***, responda ***honesta y completamente*** a todas las siguientes preguntas relacionadas con su aprendizaje general:

   (a) En términos de lo matemático y lo de escritura, ¿cómo definiría su recorrido académico por el curso de análisis?

   (b) Con respecto a la primera reflexión y a la primera mitad del curso, ¿qué ha mejorado de sus estrategias de trabajo y estudio en general? Con respecto de lo que no ha mejorado, ¿por qué no ha mejorado? ¿Cómo podría mejorar?

---

[1] $\ell_p(\mathbb{N})=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}:x_n\in\mathbb{C},\ \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^p<\infty\}$ para $1\leq p<\infty$ y
$\ell_\infty(\mathbb{N})=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}:x_n\in\mathbb{C},\ \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|<\infty\}$.