

# Análisis

## Taller 12

Diferenciación.

Fecha de entrega: 10 de noviembre de 2023

---

1. ¿Para  $k \in \mathbb{N}$  defina  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Para cuáles  $k$  es  $f_k$  diferenciable? Para cuales  $k$  es  $f_k$  continuamente diferenciable? (Una función se llama *continuamente diferenciable* si es diferenciable y su derivada es continua.)

2. Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua y diferenciable en  $(a, b)$  con  $f'(x) \neq 1$ ,  $x \in (a, b)$ . Muestre que existe exactamente un  $p \in [a, b]$  con  $f(p) = p$ .

3. (a) **Darboux's Theorem.** Sea  $\mathcal{D} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo no vacío y  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Muestre que para cada  $q \in \mathbb{R}$  con

$$\inf\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\} < q < \sup\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\}.$$

existe un  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = q$ .

- (b) Sea  $\mathcal{D} = (a, b)$  un intervalo no vacío y  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable con un mínimo aislado global en  $x_0 \in \mathcal{D}$ .

¿Existen  $c, d \in (a, b)$  con  $c < x_0 < d$  tales que  $f'(x) \leq 0$  si  $x \in (c, x_0)$  y  $f'(x) \geq 0$ , si  $x \in (x_0, d)$ .

4. **Función exponencial.** Para  $a \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$  fijo se define la función

$$p_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad p_a(z) = \exp(z \ln(a)).$$

- (a) Para  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $q \in \mathbb{Q}$  muestre

$$p_a(q) = a^q. \quad (*)$$

- (b) Muestre que  $p_a$  es diferenciable y encuentre su derivada.

*Recall.* Para  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $n \in \mathbb{N}$  definimos

$$a^n := \prod_{n=1}^n a, \quad a^0 := 1, \quad a^{\frac{1}{n}} := \text{unique positive solution of } x^n = a.$$

Entonces  $a^q := ((a^\sigma)^{\frac{1}{m}})^n$  está definida para todos  $q = \frac{\sigma n}{m} \in \mathbb{Q}$  con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sigma \in \{\pm 1\}$ .

*Remark.* Dada la identidad (\*) se define  $a^z := \exp(z \ln(a))$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

5. **Tercer ejercicio de reflexión.** (Revise las instrucciones en Bloque Neón.) Responda (honestamente) en un *único párrafo, coherente y conciso* a todas las siguientes preguntas relacionadas con el componente de escritura dentro del curso:

- (a) ¿Cómo considera que ha influido este componente en su aprendizaje matemático?
- (b) De las retroalimentaciones recibidas, ¿qué fortalezas identifica en su proceso de escritura? ¿qué dificultades cree que debe seguir revisando?
- (c) A partir de esto, ¿reconoce usted la escritura como un proceso? cree que es importante identificar cuándo pedir ayuda u orientación dentro de este proceso?