Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 11

Series de potencias; exp.

Fecha de entrega: 03 de noviembre de 2023

Para $z \in \mathbb{C}$ definimos las series de potencias

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

1. (a) Demuestre que el radio de convergencia de las series exp, sin, cos es infinito.

(b) Demuestre que para todo $z \in \mathbb{C}$

(i) $\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z$,

(iii) $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z))$,

(ii) $\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z))$.

2. Muestre las siguientes propiedades de la función exponencial:

(a) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}, \quad z \in \mathbb{C}$,

(b) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad z, w \in \mathbb{C}$,

(c) $\exp(n) = \mathrm{e}^n, \quad n \in \mathbb{Z}$,

(d) $\exp(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}$,

(e) $|\exp(\mathrm{i}x)| = 1 \iff x \in \mathbb{R}$.

3. (a) Muestre las siguientes identidades para $x, y \in \mathbb{C}$:

(i) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(ii) $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x)$,

(iii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,

(b) Muestre que $\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\} \neq \emptyset$.

Sea $\pi := 2 \cdot \inf\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\}$.

(c) Para $x \in \mathbb{R}$ muestre:

(i) $\sin x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi$.

(ii) $\cos x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Ayuda. Puede ser útil (probar y) usar

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \qquad x \in (0, 3].$$

4. Muestre que las siguientes funciones son diferenciables y encuentre sus derivadas.

(a) $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x}$,

(b) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.