Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 10

Convergencia de funciones.

Fecha de entrega: 27 de octubre de 2023

---

1. Muestre que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$, es uniformemente continua pero no es Lipschitz continua.

2. ¿Convergen las siguientes sucesiones puntualmente? ¿Convergen uniformemente? Si convergen, encuentre la función límite.

   (a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$

   (b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx^2},$

   (c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2},$

   (d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1 + nx}.$

3. Sean X un espacio métrico, Y un espacio normado y sean $f_n, g_n : X \to Y$ funciones que convergen uniformemente a f y g respectivamente.

   (a) Muestre que $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente.

   (b) ¿El producto $(f_n \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ necesariamente converge uniformemente?

   (c) Sean X un espacio métrico compacto, $f_n : X \to \mathbb{R}$ funciones que convergen uniformemente a una función continua $f : X \to \mathbb{R}$. Suponga que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Demuestre que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq 0$ para todo $n > N$ y todo $x \in X$.
   La conclusión es válida si X no es compacto?

4. Encuentre el radio de convergencia de

   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^n}{n}$, ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$, iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - 1)^n z^n$, iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n z^{3n}}{3^n}$.

No alcanzamos a ver series de potencias en clase. Si quiere, puede hacer el siguiente ejercicio en lugar del ejercicio 4.

5. (a) Existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que alcanza cada valor en su rango exactamente dos veces?

   (b) Existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que alcanza cada valor en su rango exactamente tres veces?