

Análisis

Taller 9

Continuidad.

Fecha de entrega: 20 de octubre de 2023

1. Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre que las siguientes funciones son continuas:

$$S : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) := \min\{f(x), g(x)\},$$
$$T : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x-) := \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Defina

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x-).$$

Demuestre que g es continua por la izquierda y dé un ejemplo donde $f \neq g$.

3. Sea $I = (a, b)$ un intervalo no-vacío en los reales y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función.
- (a) Suponga que f es continua. Muestre que f es inyectiva si y sólo si f es estrictamente monótona.
 - (b) Suponga que f es estrictamente creciente o decreciente. Muestre que es invertible y que su inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.
4. Sean $a < b$ números reales y $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua. Muestre que existe por lo menos un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.