Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 8

Continuidad. Fecha de entrega: 13 de octubre de 2023

---

1. Para $j = 1, \ldots, n$ sea $(X_j, \|\cdot\|_j)$ un espacio normado sobre $\mathbb{F}$ donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
   (a) $(X_1 \times \cdots \times X_n, \|\cdot\|)$ con
   $$\|(x_1, \ldots, x_n)\| := \|x_1\|_1 + \cdots + \|x_n\|_n$$
   es un espacio normado sobre $\mathbb{F}$.
   (b) Muestre que para todo $j = 1, \ldots, n$ la proyección pr_j es continua donde
   $$\mathrm{pr}_j : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_j, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j.$$
   (c) Sea V un espacio normado, $f_j : V \to X_j$ y
   $$f = (f_1, \ldots, f_n) : V \to X_1 \times \cdots X_n, \qquad f(v) = (f_1(v), \ldots, f_n(v)).$$
   Muestre que f es continua si y sólo si todas las f_j son continuas.

2. ¿Donde son las siguientes funciones continuas? Pruebe su respuesta.
   (a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x},$
   (b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z + \bar{z}^2|,$
   (c) $h : [-1, 1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{-x}, & -1 \le x \le 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 1, \\ x, & x = 2. \end{cases}$
   (d) $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

3. Diga dónde las siguientes funciones son continuas y dónde son discontinuas. Pruebe su afirmación.
   (a) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/q, & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{N} \text{ sin divisor común.} \end{cases}$
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

4. **Criterio de Cauchy.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, Y completo, $f : X \supseteq \mathcal{D} \to Y$ una función y x_0 un punto límite de $\mathcal{D}$. Entonces f tiene un límite en x_0 si y sólo si
   $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in D_f : \\ \Big(0 < d_X(x, x_0) < \delta\ \wedge\ 0 < d_X(y, x_0) < \delta \implies d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon\Big).$$

5. Resuma en un solo párrafo lo visto en la semana. **Revise y lea atentamente las instrucciones en Bloque Neón**.

Ejercicio voluntario

6. Para $x \in (0, \infty)$ sea $[x]$ su parte entera, es decir, $[x] = \text{máx}\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq x\}$. Determine si la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$$