

# Análisis

## Taller 7

Series; el número de Euler.

Fecha de entrega: 29 de septiembre de 2023

---

1. **El número de Euler e.** Para  $n \in \mathbb{N}$  sean  $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  y  $s_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ .

(a) Muestre que las sucesiones  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergen.

(b) Muestre que  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ .

2. ¿Convergen las siguientes series? Pruebe sus respuestas.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ , (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ , (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$  donde  $a \in \mathbb{R}$ ,

(d)  $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ , donde  $b_{2m} := \frac{1}{(2m)^2}$ ,  $b_{2m+1} = -\frac{1}{2m}$ .

3. (a) Para  $n \in \mathbb{N}$  sean  $a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$  y  $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Muestre que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge pero  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  diverge.

(b) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión monótonicamente decreciente tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge en  $\mathbb{R}$ . Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

4. (a) Para una sucesión decreciente  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$  muestre

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n a_{2^n} \text{ converge.}$$

(b) Determine si las series  $\sum_{n=2}^{\infty} (n \log_2 n)^{-1}$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$  convergen. Pruebe!  
(Utilice sus conocimientos aprendidos en los cursos de cálculo sobre la función logaritmo.)

5. Resuma en un solo párrafo lo visto en la semana. **Revise y lea atentamente las instrucciones en Bloque Neón.**