

Puntos de acumulación; \limsup , \liminf .

Fecha de entrega: 22 de septiembre de 2023

1. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Muestre:

- (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{el punto de acumulación más grande de } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{el punto de acumulación más pequeño de } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. (a) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y defina sucesiones $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ por

$$y_k := \sup\{x_n : n \geq k\}, \quad z_k := \inf\{x_n : n \geq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Muestre que $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergen en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \limsup x_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \liminf x_n.$$

(b) Encuentre una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \liminf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \limsup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

¿Debe $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tener un máximo en este caso?

3. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado y para $n \in \mathbb{N}$ defina $b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$.

Muestre o encuentre un contraejemplo:

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\implies (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- (b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4. Muestre o encuentre un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

- (a) Una sucesión de números reales converge si y solo si tiene exactamente un punto de acumulación.
- (b) En un espacio normado, toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación.
- (c) En un espacio de normado, una sucesión acotada es convergente si y solo si tiene exactamente un punto de acumulación.

5. **Segundo ejercicio de reflexión.** Responda en un único párrafo a las siguientes preguntas: ¿Cómo se sintió en el ejercicio de coevaluación? ¿Qué valor encuentra en el ejercicio? ¿Qué aprendizajes le deja este ejercicio con respecto al proceso de escritura matemática? ¿Considera que estos ejercicios le motivan a trabajar de manera más frecuente con sus compañeros? Si sí, cómo podría aplicarlo?