Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 5

Sucesiones.

Fecha de entrega: 15 de septiembre de 2023

---

1. La sucesión de Fibonacci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sean $\sigma < \tau$ las soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$ y

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en $\mathbb{R}$.

   (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+1} - \sigma^{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}$.

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \tau$.

2. Si existe, encuentre el valor de

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

es decir, el límite de la sucesción $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$x_1 := 1 \quad \text{and} \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n},\ n \geq 1.$$

3. Sean $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos en $\mathbb{R}$ con $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Muestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.

4. Muestre que en $\mathbb{R}$ (un campo ordenado que es extensión del campo ordenado $\mathbb{Q}$), lo siguente es equivalente.

   (a) Cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge (es decir, $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo).

   (b) $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la minima cota superior.

   (c) $\mathbb{R}$ satisface la propiedad del ejercicio 3.

5. Resuma en un solo párrafo lo visto en la semana. **Revise y lea atentamente las instrucciones en Bloque Neón**.