

Análisis

Taller 4

Espacios normados; sucesiones.

Fecha de entrega: 08 de septiembre de 2023

1. Sea $q \in \mathbb{R}_+$ y $x_n := \sqrt[n]{q}$, $y_n := \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Convergen las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Si es así, encuentre el límite.

2. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Muestre o encuentre un contraejemplo:

(I) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$ tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq N,$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(II) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q \leq 1$ tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq N,$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

3. Sea X un conjunto no vacío y sea

$$L_\infty(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} : \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty \right\}$$

y para $f \in L_\infty(X)$ defina

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Demuestre que $(L_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado.

4. (a) Sea $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Demuestre que $\sum_{j=0}^k c^j = \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ tal que exista un $c \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \quad x, y \in X.$$

Demuestre que existe exactamente un $z \in X$ tal que $f(z) = z$.

5. **Primer ejercicio de reflexión.** Responda en un único párrafo, coherente y conciso, a las siguientes preguntas relacionadas con su aprendizaje matemático: Cómo definiría sus primeras tres semanas de clase? cómo se ha sentido al respecto? considera que ha utilizado estrategias adecuadas para el entendimiento y práctica de los temas ofrecidos? En caso afirmativo cuáles son? De lo contrario cómo podría mejorar sus hábitos de estudio de esta materia? **Recuerde subir el párrafo a Bloque Neón y revise las instrucciones allí.**