Universidad de los Andes
MATE-2201

Analysis 1

Taller 2

Campos ordenados; supremo y ínfimo. Fecha de entrega: 25 de agosto de 2023

---

1. Sea $(K, +, \cdot, >)$ un campo ordenado y sean a, x, x', y, $y' \in K$. Pruebe lo siguiente (vea Corolario 3.9 en las notas de clase). Justifique cada paso.

   (iii) $x < y \implies x + a < y + a$,
   (iv) $x < y \ \wedge \ x' < y' \implies x + x' < y + y'$,
   (v) $x < y \ \wedge \ a > 0 \implies a \cdot x < a \cdot y$,
   $x < y \ \wedge \ a < 0 \implies a \cdot x > a \cdot y$,
   (vi) $0 \leq x < y \ \wedge \ 0 \leq x' < y' \implies 0 \leq x' \cdot x < y' \cdot y$,
   (x) $0 < x < y \implies 0 < y^{-1} < x^{-1}$,
   (xi) $x > 0 \wedge y < 0 \implies xy < 0$.

Para los siguentes ejercicios puede usar que existe un único campo ordenado $\mathbb{R}$ que contiene $\mathbb{N}_0$, satisface los axiomas de orden (OA1), (OA2), (OA3) y que tiene la propiedad de la mínima cota superior.

---

2. Encuentre el ínfimo y el supremo de los conjuntos in el campo ordenado $\mathbb{R}$. Determine si tienen máximo y/o mínimo.

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} \ \ x = n^2\}$,
   (b) $\left\{ \dfrac{|x|}{1 + |x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$,
   (c) $\left\{ x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} \ \ x = \dfrac{1}{n} + n\big(1 + (-1)^n\big) \right\}$,
   (d) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2 \right\} \cap \mathbb{Q}$.

3. (a) Para todo $x \in \mathbb{R}_+$ existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $n \leq x < n + 1$ (vea Proposición 3.19).
   (b) Todo intervalo en $\mathbb{R}$ con por lo menos dos puntos diferentes contiene un número racional. (Proposición 3.20)
   (c) $\mathbb{Q}$ no tiene la *least upper bound property.*

4. (a) Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ y $\xi \in \mathbb{R}$ una cota superior de X. Muestre que
   $$\xi = \sup X \quad \iff \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists\, x_\varepsilon \in X \ \ \xi - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \xi.$$
   Formule la afirmación análoga para $\inf X$.
   (b) Sean X, $Y \subset \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos tal que
   $$\forall\, x \in X \ \ \exists\, y \in Y \ : \ y < x.$$
   ¿Se sigue que $\inf Y < \inf X$? Pruebe su afirmacíon.

5. En un párrafo, escriba un resumen de lo visto en la Semana 2. Por favor, revise las instrucciones en Bloque Neón.

6. **Problema voluntario.** Encuentre un campo ordenado sin la propiedad arquimedeana.