

Analysis 1

Taller 1

Conjuntos; inducción.

Fecha de entrega: 18 de agosto de 2023

- (a) Muestre que el conjunto de potencias $\mathbb{P}\mathbb{N}$ no es contable.
(b) Sean A, B conjuntos. Muestre o encuentre un contraejemplo:
 - $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}A \cap \mathbb{P}B$.
 - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}A \cup \mathbb{P}B$.

2. Muestre las siguientes fórmulas y desigualdades:

(a)
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

(b)
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Muestre las siguientes fórmulas y desigualdades:

- $2^n \leq n!$ para $n \geq 4$.
- Demuestre que 13 es divisor de $3^{n+2} + 4^{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

4. Para $n \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{N}$ sea

$$a(m, n) := \#\left\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=1}^m x_j \leq n\right\},$$
$$b(m, n) := \#\left\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=1}^m x_j = n\right\}.$$

- Muestre que $a(m, n) = b(m+1, n)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
- Muestre que $a(m, n) = \binom{n+m}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Hint: Muestre que $a(m, n-1) + a(m-1, n) = a(m, n)$ y use inducción en $n+m$.

5. En un párrafo, escriba un resumen de lo visto en la Semana 1. Por favor, revise las instrucciones en Bloque Neón.