

# Análisis

## Taller 16

Topología.

Fecha de entrega: 07.12.2022

1. Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A \subseteq X$ . De los siguientes literales, escoja 4 y diga si son verdaderos o falsos. Pruebe su afirmación.

- (a)  $A$  abierto  $\implies A = (\overline{A})^\circ$ ,      (e)  $\partial A$  es cerrado,      (i)  $\overline{(A^\circ)} = \overline{A}$ ,  
(b)  $A$  cerrado  $\implies A = \overline{(A^\circ)}$ .      (f)  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ ,      (j)  $\overline{(A^\circ)} = (\overline{A})^\circ$ ,  
(c)  $\partial(\overline{A}) = \partial A$ ,  $\partial(A^\circ) = \partial A$ ,      (g)  $\overline{A} \setminus A^\circ = \partial A$ ,      (k)  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ ,  
(d)  $\partial(\partial A) = \partial A$ ,      (h)  $(\overline{A})^\circ = A^\circ$ ,      (l)  $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ ,

2. Sea  $(X, \mathcal{O})$  un espacio topológico y sea  $M \subseteq X$ . Se puede concluir que  $(\partial M)^\circ = \emptyset$ ?

3. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y defina  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{P}X$  por

$$U \in \mathcal{O} \iff \forall p \in U \exists \varepsilon \geq 0 \ B_\varepsilon(p) \subseteq U.$$

- (a) Demuestre que  $(X, \mathcal{O})$  es un espacio topológico de Hausdorff.  
(b) Demuestre que para  $r > 0$  y  $a \in X$  la bola abierta  $B_r(a)$  es abierta y que la bola cerrada  $K_r(a)$  es cerrada. Sea  $S_r(a) := \{x \in X : d(x, a) = r\}$ . Demuestre que

$$\partial B_r(a) \subseteq S_r(a) \quad \text{and} \quad \overline{B_r(a)} \subseteq K_r(a). \quad (*)$$

¿Se tiene igualdad en (\*)?

4. Encuentre el interior y la clausura de

$$M := \{(x, \sin(x^{-1})) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

5. Demuestre que todo subconjunto abierto de  $\mathbb{R}$  es unión disjunta de a lo más contables intervalos abiertos.

6. Sean  $K, A \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $K$  es compacto y  $A$  es cerrado. Demuestre que existen puntos  $p \in K$  y  $a \in A$  que con distancia minimal, es decir,

$$|p - a| = \inf\{|q - x| : q \in K, x \in A\}.$$

7. Sea  $X$  un espacio normado y sean  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  normas sobre  $X$ . Demuestre que existen números  $c_1, c_2 > 0$  tal que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1, \quad x \in X.$$

8. Encuentre un espacio topológico que es conexo pero no camino conexo.

*Hint.* Ejercicio 16.4