Universidad de los Andes
MATE-2201

# Análisis

Taller 14

Integración.

Fecha de entrega: 21 de noviembre de 2022

---

1. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

2. (a) Sea $a \in \mathbb{R}_+$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f = \exp$. Calcule $\displaystyle\int\limits_0^a \exp(x)\,\mathrm{d}x$ usando sumas de Riemann $s(f, P)$ y $S(f, P)$.

   (b) Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

   (c) Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$.

3. Existe $\displaystyle\int_0^1 D(t)\mathrm{d}t$, donde $D$ es la función de Dirichlet

$$D : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad D(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4. ¿Existe la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ?

5. **Ejercicio de escritura.** *Tercer ejercicio de reflexión.* Responda en un *único párrafo*, *conciso* y *coherente* a las siguientes tres cuestiones acerca de su escritura del texto argumentativo, el cual realizó durante esta segunda mitad del semestre:

   (i) ¿Cómo puede relacionar el escribir un texto argumentativo con la escritura matemática?

   (ii) Responda a honestidad, ¿tuvo en cuenta usted todas las retroalimentaciones dadas en el proceso de construcción de su texto? Explique ¿por qué?

   (iii) Teniendo en cuenta el marco de la interdisciplinariedad y el razonamiento lógico ¿qué puede concluir de los puntos anteriores?

---

**Definición.** Sean $a < b \in \mathbb{R}$ y sea $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \in (a,b)$, la restriccón de $f$ a $[\alpha, b]$ es Riemann-integrable. Se define la *integral imporopia* $\int_a^b f\mathrm{d}x := \lim_{\alpha\searrow a} \int_\alpha^b f\mathrm{d}x$ si el límite existe.
Sea $c \in \mathbb{R}$ y sea $f : [c,\infty] \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\beta \in (c,\infty)$, la restriccón de $f$ a $[c,\beta]$ es Riemann-integrable. Se define la *integral imporopia* $\int_c^\infty f\mathrm{d}x := \lim_{\beta\nearrow\infty} \int_c^\beta f\mathrm{d}x$ si el límite existe.
Sea $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que existe un $c > a$ tal que las integrales impropias $\int_a^c f\mathrm{d}x$ y $\int_c^\infty f\mathrm{d}x$ existen. En este caso, la integral impropia de $f$ es $\int_a^\infty f\mathrm{d}x := \int_a^c f\mathrm{d}x + \int_c^\infty f\mathrm{d}x$.