

Análisis

Taller 13

Diferenciación. Regla de l'Hôpital.

Fecha de entrega: 17 de noviembre de 2022

1. **Función exponencial.** Para $a \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ fijo se define la función

$$p_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad p_a(z) = \exp(z \ln(a)).$$

(a) Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \mathbb{Q}$ muestre

$$p_a(q) = a^q. \quad (*)$$

(b) Muestre que p_a es diferenciable y encuentre su derivada.

Recall. Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$a^n := \prod_{n=1}^n a, \quad a^0 := 1, \quad a^{\frac{1}{n}} := \text{unique positive solution of } x^n = a.$$

Entonces $a^q := ((a^\sigma)^{\frac{1}{m}})^n$ está definida para todos $q = \frac{\sigma n}{m} \in \mathbb{Q}$ con $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\sigma \in \{\pm 1\}$.

Remark. Dada la identidad (*) se define $a^z := \exp(z \ln(a))$, $a \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{C}$.

2. Halle los siguientes límites si existen:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right),$ (b) $\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{a} \right)^a$ con $x \in \mathbb{R},$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{1/x},$ (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1 - x^a} - \frac{b}{1 - x^b} \right)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

3. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Demuestre:

$$f \text{ es convexa}^1 \iff f'' \geq 0.$$

4. Sean $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ y $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables con $g'(x) \neq 0$ en (α, β) y $\lim_{x \searrow \alpha} g(x) = \lim_{x \searrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. Muestre que $\lim_{x \searrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

5. **Ejercicio de escritura.** Segundo ejercicio de reflexión (segunda parte). Responda en un único párrafo, conciso y coherente a las siguientes tres cuestiones acerca del componente de escritura dentro del curso:

- (i) ¿Cómo considera que ha influido este componente en su aprendizaje matemático?
- (ii) De las retroalimentaciones recibidas, ¿qué fortalezas identifica en su proceso de escritura? ¿qué dificultades cree que debe seguir afrontando?
- (iii) A partir de esto, ¿reconoce usted la escritura como un proceso? cree que es importante identificar cuándo pedir ayuda u orientación dentro de este proceso?

¹**Definición.** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no vacío. Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *convexa* si para todo $x, y \in (a, b)$ y todo $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$