

Análisis

Taller 11

Series de potencias; exp.

Fecha de entrega: 03 de noviembre de 2022

Para $z \in \mathbb{C}$ definimos las series de potencias

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- (a) Demuestre que el radio de convergencia de las series exp, sin, cos es infinito.
(b) Demuestre que para todo $z \in \mathbb{C}$
 - $\exp(z) = \cos z + i \sin z$,
 - $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$,
 - $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$.

2. Muestre las siguientes propiedades de la función exponencial:

- $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, $z \in \mathbb{C}$,
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, $z, w \in \mathbb{C}$,
- $\exp(n) = e^n$, $n \in \mathbb{Z}$,
- $\exp(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$,
- $|\exp(ix)| = 1 \iff x \in \mathbb{R}$.

3. (a) Muestre las siguientes identidades para $x, y \in \mathbb{C}$:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
- $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$,
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,

(b) Muestre que $\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\} \neq \emptyset$.

Sea $\pi := 2 \cdot \inf\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\}$.

(c) Para $x \in \mathbb{R}$ muestre:

- $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ x = k\pi$.
- $\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Ayuda. Puede ser útil (probar y) usar

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x \in (0, 3].$$

4. Encuentre el radio de convergencia de

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^n}{n}, \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-1)^n z^n, \quad \text{iv) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n z^{3n}}{3^n}.$$

5. **Ejercicio de escritura.** Una vez realizados y retroalimentados cada uno de los elementos que conforman un texto argumentativo (introducción, argumentación y contraargumentación, conclusión), corríjalos y plásmelos de manera coherente y cohesionada dentro de lo que es el texto argumentativo propiamente. No olvide revisar las instrucciones que estará n dadas en la actividad correspondiente en Bloque Neón.