

# Análisis

## Taller 9

Continuidad.

Fecha de entrega: 20 de octubre de 2022

---

Sea  $I \subset \mathbb{R}$ . Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se llama

- (I) *creciente* si para todo  $x, y \in I$  con  $x < y$  se tiene que  $f(x) \leq f(y)$ .
  - (II) *estrictamente creciente* si para todo  $x, y \in I$  con  $x < y$  se tiene que  $f(x) < f(y)$ .
  - (III) *(estrictamente) decreciente* si  $-f$  es (estrictamente) creciente.
  - (IV) *(estrictamente) monótona* si  $f$  es (estrictamente) creciente o decreciente.
- 

### 1. Criterio de Cauchy (Theorem 5.15):

Sean  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  espacios métricos,  $Y$  completo,  $f : X \supseteq \mathcal{D} \rightarrow Y$  una función y  $x_0$  un punto límite de  $\mathcal{D}$ . Entonces  $f$  tiene un límite en  $x_0$  si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D_f : \\ \left( 0 < d_X(x, x_0) < \delta \wedge 0 < d_X(y, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \right).$$

### 2. Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre que las siguientes funciones son continuas:

$$S : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) := \min\{f(x), g(x)\}, \\ T : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$

### 3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x-) := \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in (-\infty, x)}} f(y)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ . Defina

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x-).$$

Demuestre que  $g$  es continua por la izquierda y dé un ejemplo donde  $f \neq g$ .

### 4. Sea $I = (a, b)$ un intervalo no-vacío en los reales y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

- (a) Suponga que  $f$  es continua. Muestre que  $f$  es inyectiva si y sólo si  $f$  es estrictamente monótona.
- (b) Suponga que  $f$  es estrictamente creciente o decreciente. Muestre que es invertible y que su inversa  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

### 5. Escriba los párrafos de desarrollo de su texto argumentativo anteriormente planeado: **máximo dos párrafos** de argumentación y **solo un párrafo** de contraargumentación. Las demás instrucciones las encuentra en las Actividades en Bloque Neón.