Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 6

Puntos de acumulación; $\limsup, \liminf$. Fecha de entrega: 22 de septiembre de 2022

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Recuerde que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} x_n &:= \inf\{x \in \mathbb{R} : x \geq x_n \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N}\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ con } x \geq x_n \text{ para } n \geq N\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} x_n &:= \sup\{x \in \mathbb{R} : x \leq x_n \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup\{x \in \mathbb{R} : \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ con } x \leq x_n \text{ para } n \geq N\}.
\end{aligned}$$

---

1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Muestre:
   (a) $\limsup_{n\to\infty} x_n =$ el punto de acumulación más grande de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) $\liminf_{n\to\infty} x_n =$ el punto de acumulación más pequeño de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (a) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y defina sucesiones $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ por
   $$y_k := \sup\{x_n : n \geq k\}, \qquad z_k := \inf\{x_n : n \geq k\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$
   Muestre que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergen en $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ y que
   $$\lim_{k\to\infty} y_k = \limsup x_n, \qquad \lim_{k\to\infty} z_k = \liminf x_n.$$
   (b) Encuentre una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que
   $$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \liminf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \limsup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$
   ¿Debe $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tener un máximo en este caso?

3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado y para $n \in \mathbb{N}$ defina $b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.
   Muestre o encuentre un contraejemplo:
   (a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\implies$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\implies$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Muestre o encuentre un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:
   (a) Una sucesión de números reales converge si y solo si tiene exactamente un punto de acumulación.
   (b) En un espacio normado, toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación.
   (c) En un espacio de normado, una sucesión acotada es convergente si y solo si tiene exactamente un punto de acumulación.

5. Resuma en 1-2 párrafos los temas de esta semana.