Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 5

Sucesiones.

Fecha de entrega: 15 de septiembre de 2022

---

1. La sucesión de Fibonacci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida por
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Sean $\sigma < \tau$ las soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$ y
$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en $\mathbb{R}$.
   (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+1} - \sigma^{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}$.
   (c) $\lim_{n\to\infty} x_n = \tau$.

2. Si existe, encuentre el valor de
$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$
es decir, el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde
$$x_1 := 1 \quad \text{and} \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \; n \geq 1.$$

3. Sea X un conjunto no vacío y sea
$$L_\infty(X) = \Big\{ f : X \to \mathbb{R} \; : \; \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty \Big\}$$
y para $f \in L_\infty(X)$ defina
$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$
Demuestre que $(L_\infty(X), \; \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado.

4. (a) Sea $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Demuestre que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} c^j = \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.
   (b) Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ tal que exista un $c \in (0, 1)$ tal que
$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y), \qquad x, y \in X.$$
   Demuestre que existe exactamente un $z \in X$ tal que $f(z) = z$.

5. Resuma en 1-2 párrafos los temas de las dos clases anteriores.