

Análisis

Taller 4

Espacios normados; sucesiones.

Fecha de entrega: 08 de septiembre de 2022

1. Sea $q \in \mathbb{R}_+$ y $x_n := \sqrt[q]{n}$, $y_n := \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Convergen las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Si es así, encuentre el límite.
2. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Muestre o encuentre un contraejemplo:
 - (i) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$ tal que
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq N,$$
luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
 - (ii) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q \leq 1$ tal que
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq N,$$
luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
3. Sean $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos en \mathbb{R} con $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Muestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.
4. Muestre que en \mathbb{R} (un campo ordenado que es extensión del campo ordenado \mathbb{Q}), lo siguiente es equivalente.
 - (a) Cada sucesión de Cauchy en \mathbb{R} converge (es decir, \mathbb{R} es un espacio métrico completo).
 - (b) \mathbb{R} tiene la propiedad de la mínima cota superior.
 - (c) \mathbb{R} satisface la propiedad del ejercicio 3.
5. **Primer ejercicio de reflexión.** Responda en un único párrafo, coherente y conciso, a las siguientes preguntas relacionadas con su aprendizaje matemático: ¿Cómo definiría sus primeras tres semanas de clase? ¿cómo se ha sentido al respecto? ¿considera que ha utilizado estrategias adecuadas para el entendimiento y práctica de los temas ofrecidos? En caso afirmativo ¿cuáles son? De lo contrario ¿cómo podría mejorar sus hábitos de estudio de esta materia?