Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 3

Números complejos; espacios métricos.

Fecha de entrega: 01 de septiembre de 2022

---

1. (a) Muestre que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existen exactamente dos números $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ tal que $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = z$.

   (b) Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Muestre que existe por lo menos un $z \in \mathbb{C}$ tal que
$$az^2 + bz + c = 0.$$

2. Sea (X, d), $X \neq \emptyset$, un espacio métrico y $M \subseteq X$. Muestre que lo siguiente es equivalente:
   (i) M es acotado.
   (ii) $\exists\, x \in X\ \exists\, r > 0 : M \subseteq B_r(x)$.
   (iii) $\forall\, x \in X\ \exists\, r > 0 : M \subseteq B_r(x)$.

3. (a) Sea (X, d), $X \neq \emptyset$, un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X. Muestre: Si existe $a \in X$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} y_n,$$
entonces
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$
¿Se tiene el otro sentido (prueba o contraejemplo)?

   (b) Sea (X, d) un espacion métrico y $\varrho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Muestre: Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge, luego $(x_{\varrho(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge y tiene el mismo límite.

   ¿Las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas?
   (i) Si todo reordenamiento de una sucesión converge, la sucesión misma converge.
   (ii) Si un reordenamiento de una sucesión converge, la sucesión misma converge.

4. (a) Sea $x_n = \sqrt{1 + n^{-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Muestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.[1]

   (b) Convergen los siguientes sucesiones en $\mathbb{R}$? En el caso de convergencia, halle el límite. Pruebe sus afirmaciones.
   (i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n = \dfrac{2^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$,
   (ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $b_n = \sqrt{1 + n^{-1} + n^{-2}}, \quad n \in \mathbb{N}$,
   (iii) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $d_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n, \quad n \in \mathbb{N}$,

5. Resuma en 1-2 párrafos los temas de la semana 1. (Entréguelo en una hoja aparte.)

---

[1] Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > M$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. (Veremos este concepto in la clase del martes.)