

Analysis 1

Taller 2

Campos ordenados; supremo y ínfimo.

Fecha de entrega: 25 de febrero de 2022

1. Sea $(K, +, \cdot, >)$ un campo ordenado y sean $a, x, x', y, y' \in K$. Pruebe lo siguiente (vea Corolario 3.9 en las notas de clase). Justifique cada paso.

- (iii) $x < y \implies x + a < y + a$,
- (iv) $x < y \wedge x' < y' \implies x + x' < y + y'$,
- (v) $x < y \wedge a > 0 \implies a \cdot x < a \cdot y$,
 $x < y \wedge a < 0 \implies a \cdot x > a \cdot y$,
- (vi) $0 \leq x < y \wedge 0 \leq x' < y' \implies 0 \leq x' \cdot x < y' \cdot y$,
- (x) $0 < x < y \implies 0 < y^{-1} < x^{-1}$,
- (xi) $x > 0 \wedge y < 0 \implies xy < 0$.

Para los siguientes ejercicios puede usar que existe un único campo ordenado \mathbb{R} que contiene \mathbb{N}_0 , satisface los axiomas de orden (OA1), (OA2), (OA3) y que tiene la propiedad de la mínima cota superior.

2. Encuentre el ínfimo y el supremo de los conjuntos in el campo ordenado \mathbb{R} . Determine si tienen máximo y/o mínimo.

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \ x = n^2\}$,
- (b) $\left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$,
- (c) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \ x = \frac{1}{n} + n(1 + (-1)^n)\}$,
- (d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\} \cap \mathbb{Q}$.

3. (a) Para todo $x \in \mathbb{R}_+$ existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $n \leq x < n + 1$ (vea Proposición 3.19).
(b) Todo intervalo en \mathbb{R} con por lo menos dos puntos diferentes contiene un número racional. (Proposición 3.20)
(c) \mathbb{Q} no tiene la *least upper bound property*.

4. (a) Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ y $\xi \in \mathbb{R}$ una cota superior de X . Muestre que

$$\xi = \sup X \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists x_\varepsilon \in X \ \xi - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \xi.$$

Formule la afirmación análoga para $\inf X$.

- (b) Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos tal que

$$\forall x \in X \ \exists y \in Y : y < x.$$

¿Se sigue que $\inf Y < \inf X$? Pruebe su afirmación.

5. Resuma en 1-2 párrafos los temas de esta semana.

6. **Problema voluntario.** Encuentre un campo ordenado sin la propiedad arquimedea.