Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 13

Integración. Fecha de entrega: 02 de mayo de 2019

---

1. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

2. (a) Sea $a\in\mathbb{R}_+$ y sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f=\exp$. Calcule $\displaystyle\int\limits_0^a \exp(x)\,\mathrm{d}x$ usando sumas de Riemann $s(f,P)$ y $S(f,P)$.
   (b) Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$.
   (c) Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$.

3. (a) ¿Existe la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$?
   (b) Existe $\displaystyle\int_0^1 D(t)\mathrm{d}t$, donde D es la función de Dirichlet

$$D:[0,1]\to\mathbb{R},\quad D(t)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\\ 0 & \text{si } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

4. Sean $\alpha,\ \beta,\ \gamma:[-1,1]\to\mathbb{R}$,

$$\alpha(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}\qquad \beta(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\ge 0,\end{cases}\qquad \gamma(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

   Determine cuáles de las siguientes integrales $\int_{-1}^1 f\,\mathrm{d}\alpha$, $\int_{-1}^1 f\,\mathrm{d}\beta$, $\int_{-1}^1 f\,\mathrm{d}\gamma$ existen y, en caso de existencia, calcule su valor si
   (a) f es continua en 0,
   (b) $f(0+)=f(0)$,
   (c) $f(0-)=f(0)$,

Definición. Sean $a<b\in\mathbb{R}$ y sea $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha\in(a,b)$, la restriccón de f a $[\alpha,b]$ es Riemann-integrable. Se define la *integral imporopia* $\int_a^b f\mathrm{d}x:=\lim_{\alpha\searrow a}\int_\alpha^b f\mathrm{d}x$ si el límite existe.
Sea $c\in\mathbb{R}$ y sea $f:[c,\infty]\to\mathbb{R}$ tal que para todo $\beta\in(c,\infty)$, la restriccón de f a $[c,\beta]$ es Riemann-integrable. Se define la *integral imporopia* $\int_c^\infty f\mathrm{d}x:=\lim_{\beta\nearrow\infty}\int_c^\beta f\mathrm{d}x$ si el límite existe.
Sea $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que existe un $c>a$ tal que las integrales impropias $\int_a^c f\mathrm{d}x$ y $\int_c^\infty f\mathrm{d}x$ existen. En este caso, la integral impropia de f es $\int_a^\infty f\mathrm{d}x:=\int_a^c f\mathrm{d}x+\int_c^\infty f\mathrm{d}x$.