Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 12

Diferenciación; funciones exponenciales. Fecha de entrega: 26 de abril de 2019

---

1. Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ continua y diferenciable en (a,b) con $f'(x) \neq 1$, $x \in (a,b)$. Muestre que existe exactamente un $p \in [a,b]$ con $f(p) = p$.

2. **Exponential functions.** Para $a \in \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ fijo se define la función

$$p_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad p_a(z) = \exp(z \ln(a)).$$

(a) Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \mathbb{Q}$ muestre

$$p_a(q) = a^q. \tag{$*$}$$

(b) Muestre que p_a es diferenciable y encuentre su derivada.

Recall. Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$a^n := \prod_{n=1}^{n} a, \qquad a^0 := 1, \qquad a^{\frac{1}{n}} := \text{unique positive solution of } x^n = a.$$

Entonces $a^q := \big((a^\sigma)^{\frac{1}{m}}\big)^n$ está definida para todos $q = \frac{\sigma n}{m} \in \mathbb{Q}$ con $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\sigma \in \{\pm 1\}$.

Remark. Dada la identidad (**??**) se define

$$a^z := \exp(z \ln(a)), \qquad a \in \mathbb{R}^+,\ z \in \mathbb{C}.$$

3. (a) **Darboux's Theorem.** Sea $\mathcal{D} = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que para cada $q \in \mathbb{R}$ con

$$\inf\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\} \,<\, q \,<\, \sup\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\}.$$

existe un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = q$.

(b) Sea $\mathcal{D} = (a,b)$ un intervalo no vacío y $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con un mínimo aislado global en $x_0 \in \mathcal{D}$.
¿Existen $c, d \in (a,b)$ con $c < x_0 < d$ tales que $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c, x_0)$ y $f'(x) \geq 0$, si $x \in (x_0, d)$.

4. Halle los siguientes límites si existen:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}\Big)$, (b) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\Big(1 + \frac{x}{a}\Big)^a$ con $x \in \mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1 + \arctan x)^{1/x}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\Big(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b}\Big)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.