

1. Muestre las siguientes propiedades de la función exponencial:

- (a)  $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,
- (b)  $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$ ,
- (c)  $\exp(n) = e^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,
- (d)  $\exp(z) \neq 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,
- (e)  $|\exp(ix)| = 1 \iff x \in \mathbb{R}$ .

2. (a) Muestre las siguientes identidades para  $x, y \in \mathbb{C}$ :

- (i)  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ .
- (ii)  $\sin(x + y) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x)$ ,
- (iii)  $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ ,

(b) Muestre que  $\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\} \neq \emptyset$ .

Sea  $\pi := 2 \cdot \inf\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\}$ .

(c) Para  $x \in \mathbb{R}$  muestre:

- (i)  $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ x = k\pi$ .
- (ii)  $\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ .

*Ayuda.* Puede ser útil (probar y) usar

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x \in (0, 3].$$

3. Muestre que las siguientes funciones son diferenciables y encuentre sus derivadas. ¡Prueba!

- (a)  $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,
- (b)  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

4. Para  $k \in \mathbb{N}$  defina  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Para cuáles  $k$  es  $f_k$  diferenciable? Para cuales  $k$  es  $f_k$  continuamente diferenciable? (Una función se llama *continuamente diferenciable* si es diferenciable y su derivada es continua.)