Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 10

Convergencia de funciones. Fecha de entrega: 04 de abril de 2019

---

1. Sean $a < b$ números reales y $f : [a,b] \to [a,b]$ una función continua. Muestre que existe por lo menos un $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

2. Muestre que $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$, es uniformemente continua pero no es Lipschitz continua.

3. ¿Convergen las siguientes sucesiones puntualmente? ¿Convergen uniformemente? Si convergen, encuentre la función límite.

   (a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2x, & \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$

   (b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2},$

   (c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2},$

   (d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{n^2x}{1+nx}.$

4. Sean X un espacio métrico, Y un espacio normado y sean $f_n, g_n : X \to Y$ funciones que convergen uniformemente a f y g respectivamente.

   (a) Muestre que $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

   (b) ¿El producto $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ necesariamente converge uniformemente?

   (c) Sean X un espacio métrico compacto, $f_n : X \to \mathbb{R}$ funciones que convergen uniformemente a una función continua $f : X \to \mathbb{R}$. Suponga que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Demuestre que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq 0$ para todo $n > N$ y todo $x \in X$.
   La conclusión es válida si X no es compacto?

5. **Problema voluntario.**

   (a) Existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que alcanza cada valor en su rango exactamente dos veces?

   (b) Existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que alcanza cada valor en su rango exactamente tres veces?