Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 9

Continuidad.

Fecha de entrega: 28 de marzo de 2019

Sea $I \subset \mathbb{R}$. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se llama

(I) *creciente* si para todo $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que $f(x) \leq f(z)$.
(II) *estrictamente creciente* si para todo $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que $f(x) < f(z)$.
(III) *(estrictamente) decreciente* si $-f$ es (estrictamente) creciente.
(IV) *(estrictamente) monótona* si f es (estrictamente) creciente o decreciente.

---

1. Criterio de Cauchy (Theorem 5.15):

   Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, Y completo, $f : X \supseteq \mathcal{D} \to Y$ una función y x_0 un punto límite de $\mathcal{D}$. Entonces f tiene un límite en x_0 si y sólo si

   $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in D_f :$$
   $$\Big(0 < d_X(x, x_0) < \delta\ \wedge\ 0 < d_X(y, x_0) < \delta \implies d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon\Big).$$

2. Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre que las siguientes funciones son continuas:

   $$S : X \to \mathbb{R}, \quad S(x) := \text{mín}\{f(x),\ g(x)\},$$
   $$T : X \to \mathbb{R}, \quad T(x) := \text{máx}\{f(x),\ g(x)\}.$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x-)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Defina

   $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x-).$$

   Demuestre que g es continua por la izquierda y dé un ejemplo donde $f \neq g$.

4. Sea $I = (a, b)$ un intervalo no-vacío en los reales y $f : I \to \mathbb{R}$ una función.

   (a) Suponga que f es continua. Muestre que f es inyectiva si y sólo si f es estrictamente monótona.
   (b) Suponga que f es estrictamente creciente o decreciente. Muestre que es invertible y que su inversa $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ es continua.

5. **Problema voluntario.** Encuentre funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

   (I) f no es continua, pero g y $g \circ f$ lo son.
   (II) g no es continua, pero f y $g \circ f$ lo son.
   (III) f y g no son continuas, pero $g \circ f$ lo es.