

Continuidad.

Fecha de entrega: 21 de marzo de 2019

1. Para $x \in (0, \infty)$ sea $[x]$ su parte entero, es decir, $[x] = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq x\}$. Determine si la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[x\sqrt{n}]}}{n}.$$

2. Para $j = 1, \dots, n$ sea $(X_j, \|\cdot\|_j)$ un espacio normado sobre \mathbb{F} donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

- (a) $(X_1 \times \dots \times X_n, \|\cdot\|)$ con

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$$

es un espacio normado sobre \mathbb{F} .

- (b) Muestre que para todo $j = 1, \dots, n$ la proyección pr_j es continua donde

$$\text{pr}_j : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_j, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j.$$

- (c) Sea V un espacio normado, $f_j : V \rightarrow X_j$ y

$$f = (f_1, \dots, f_n) : V \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n, \quad f(v) = (f_1(v), \dots, f_n(v)).$$

Muestre que f es continua si y sólo si todas f_j son continuas.

3. ¿Dónde son las siguientes funciones continuas? Pruebe su respuesta.

(a) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x},$

(b) $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z + \bar{z}^2|,$

(c) $h : [-1, 1] \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{-x}, & -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x = 2. \end{cases}$

(d) $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

4. Diga dónde las siguientes funciones son continuas y dónde son discontinuas. Pruebe su afirmación.

(a) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/q, & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{N} \text{ sin divisor común.} \end{cases}$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$