Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 6

Puntos de acumulación; $\limsup, \liminf$. Fecha de entrega: 8 de febrero de 2019

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Recuerde que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} x_n &:= \inf\{x \in \mathbb{R} : x \geq x_n \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N}\}\\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ con } x \geq x_n \text{ para } n \geq N\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} x_n &:= \sup\{x \in \mathbb{R} : x \leq x_n \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N}\}\\ &= \sup\{x \in \mathbb{R} : \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ con } x \leq x_n \text{ para } n \geq N\}.\end{aligned}$$

---

1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Muestre:
   (a) $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n =$ el punto de acumulación más grande de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n =$ el punto de acumulación más pequeño de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (a) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y defina sucesiones $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ por
   $$y_k := \sup\{x_n : n \geq k\}, \qquad z_k := \inf\{x_n : n \geq k\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$
   Muestre que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergen en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y que
   $$\lim_{k\to\infty} y_k = \limsup x_n, \qquad \lim_{k\to\infty} z_k = \liminf x_n.$$
   (b) Encuentre una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que
   $$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \liminf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \limsup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$
   ¿Debe $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tener un máximo en este caso?

3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por
   $$b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$
   Muestre o encuentre un contraejemplo:
   (a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\implies$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\implies$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Muestre o encuentre un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:
   (a) Una sucesión de números reales converge si y solo si tiene exactamente un punto de acumulación.
   (b) z es punto de acumulación de la sucesión $(x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ si y solo si existe un $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $(B_\varepsilon(z) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \setminus \{z\} \neq \emptyset$.
   (c) En un espacio de Banach, toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación.