Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 4

Espacios normados; sucesiones.

Fecha de entrega: 21 de febrero de 2019

---

1. Sea $q \in \mathbb{R}_+$ y $x_n := \sqrt[n]{q},\ y_n := \sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}$. Convergen las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Si es así, encuentre el límite.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Muestre o encuentre un contraejemplo:

   (I) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$ tal que
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq N,$$
   luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (II) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q \leq 1$ tal que
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq N,$$
   luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Sean $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos en $\mathbb{R}$ con $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Muestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.

4. Muestre que en $\mathbb{R}$ (un campo ordenado que es extensión del campo ordenado $\mathbb{Q}$), lo siguente es equivalente.

   (a) Cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge (es decir, $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo).

   (b) $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la minima cota superior.

   (c) $\mathbb{R}$ satisface la propiedad del ejercicio 3.