Universidad de los Andes
MATE-2201

Analysis 1

Taller 1

Conjuntos; inducción. Fecha de entrega: 31 de enero de 2019

---

1. (a) Muestre que un subconjunto de un conjunto contable es contable o finito.
   (b) Muestre que la unión contable de conjuntos contables es contable.
   (c) Muestre que el producto directo de conjuntos contables es contable.
   (d) Muestre que $\mathbb{Q}$ es contable.

2. (a) Muestre que el conjunto de potencias $\mathbb{P}\mathbb{N}$ no es contable.
   (b) Sean A, B conjuntos. Muestre o encuentre un contraejemplo:
      (i) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}A \cap \mathbb{P}B$.
      (ii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}A \cup \mathbb{P}B$.

3. Muestre las siguientes fórmulas y desigualdades:
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\ , \quad n \in \mathbb{N}.$
   (c) $2^n \leq n!$ para $n \geq 4$.

4. Para $n \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{N}$ sea

$$a(m,n) := \#\{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}_0^m \ :\ \sum_{j=1}^{m} x_j \leq n\},$$

$$b(m,n) := \#\{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}_0^m \ :\ \sum_{j=1}^{m} x_j = n\}.$$

   (a) Muestre que $a(m,n) = b(m+1,n)$, $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0$.
   (b) Muestre que $a(m,n) = \binom{n+m}{m}$, $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0$.

   Hint: Muestre que $a(m,n-1) + a(m-1,n) = a(m,n)$ y use inducción en $n+m$.