Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 15

Topología. Fecha de entrega: 01 de diciembre de 2017

---

1. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. De los siguientes literales, escoja 4 y diga si son verdaderos o falsos. Pruebe su afirmación.

   (a) A abierto $\implies A = (\overline{A})^\circ$,
   (b) A cerrado $\implies A = \overline{(A^\circ)}$.
   (c) $\partial(\overline{A}) = \partial A,\ \partial(A^\circ) = \partial A$,
   (d) $\partial(\partial A) = \partial A$,
   (e) ∂A es cerrado,
   (f) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$,
   (g) $\overline{A} \setminus A^\circ = \partial A$,
   (h) $(\overline{A})^\circ = A^\circ$,
   (i) $\overline{(A^\circ)} = \overline{A}$,
   (j) $\overline{(A^\circ)} = (\overline{A})^\circ$,
   (k) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,
   (l) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$,

2. Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio toplógico y sea $M \subseteq X$. Se puede concluir que $(\partial M)^\circ = \emptyset$?

3. Sea (X, d) un espacio métrico y defina $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{P}X$ por

$$U \in \mathcal{O} \quad :\iff \quad \forall p \in U \quad \exists \varepsilon \geq 0 \quad B_\varepsilon(p) \subseteq U.$$

   (a) Demuestre que $(X, \mathcal{O})$ es un espacio topológico de Hausdorff.
   (b) Demuestre que para $r > 0$ y $a \in X$ la bola abierta $B_r(a)$ es abierta y que la bola cerrada $K_r(a)$ es cerrada Sea $S_r(a) := \{x \in X : d(x, a) = r\}$. Demuestre que

$$\partial B_r(a) \subseteq S_r(a) \quad \text{and} \quad \overline{B_r(a)} \subseteq K_r(a). \tag{$*$}$$

   ¿Se tiene igualdad en $(*)$?

4. Encuentre el interior y la clausura de

$$M := \{(x, \sin(x^{-1})) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Ejercicios voluntarios

---

5. Demuestre que todo subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es unión disjunta de a lo más contables intervalos abiertos.

6. Sean K, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que K es compacto y A es cerrado. Demuestre que existen puntos $p \in K$ y $a \in A$ que con distancia minimal, es decir,

$$|p - a| = \inf\{|q - x| : q \in K,\ x \in A\}.$$

7. Sea X un espacio normado y sean $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ normas sobre X. Demuestre que existen números $c_1, c_2 > 0$ tal que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1, \qquad x \in X.$$

8. Encuentre un espacio topológico que es conexo pero no camino conexo.
Hint. Ejercicio 15.4