Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 14

Series de Taylor.

Fecha de entrega: 24 de noviembre de 2017

---

1. (a) Calcule la serie de Taylor de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ centrada en 4. La serie coincide con la función f dentro de su intervalo de convergencia?

   (b) Calcule la serie de Taylor de $g(x) = x^2(x-4)^2$ centrada en 4. La serie coincide con la función g dentro de su intervalo de convergencia?

   (c) Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 de $h(x) = \dfrac{\sin(x^3)}{1-x}$ centrada en 0.

   (d) Calcule el polinomio de Taylor de grado 4 de $k(x) = \dfrac{(\cos x)^2}{1-\sin(x^2)}$ centrada en 0.

2. (a) Sea $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\log(\cos x)$. Muestre que

$$\left| f(x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3}|x|^3, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

   (b) Sin usar la regla de l'Hospital, calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x) - x^3}{(\mathrm{e}^x - 1)(1-\cos(x^2))}.$$

3. Muestre que las siguientes funciones son infinitamente derivable y encuentre sus series de Taylor centradas en 0. Halle los radios de convergencia y determine donde las funciones son iguales a sus series de Taylor.

   (a) $$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   (b) $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}.$$

4. Si $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\lim_{t\to 0} \int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 + x^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 15

Topología.

Fecha de entrega: 01 de diciembre de 2017

---

1. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Diga si lo siguiente es verdad. Pruebe su afirmación.
   (a) $\partial(\overline{A}) = \partial A, \quad \partial(A^\circ) = \partial A$,
   (b) $\partial(\partial A) = \partial A$,
   (c) $\overline{A} \setminus A^\circ = \partial A$,
   (d) $(\overline{A})^\circ = \overline{(A^\circ)}, \quad (\overline{A})^\circ = A^\circ$,
   (e) $\overline{(A^\circ)} = (\overline{A})^\circ, \quad \overline{(A^\circ)} = \overline{A}$,
   (f) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,
   (g) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$,

2. Sea (X, d) un espacio métrico y defina $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{P}X$ por

$$U \in \mathcal{O} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall p \in U \quad \exists \varepsilon \geq 0 \quad B_\varepsilon(p) \subseteq U.$$

   Demuestre que $(X, \mathcal{O})$ es un espacio topológico de Hausdorff.

   Demuestre que para $r > 0$ y $a \in X$ la bola abierta $B_r(a)$ es abierta y que la bola cerrada $K_r(a)$ es cerrada Sea $S_r(a) := \{x \in X : d(x, a) = r\}$. Demuestre que

$$\partial B_r(a) \subseteq S_r(a) \quad \text{and} \quad \overline{B_r(a)} \subseteq K_r(a). \tag{$*$}$$