

Análisis

Taller 13

Integración.

Fecha de entrega: 17 de noviembre de 2017

1. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.
2. (a) Sea $a \in \mathbb{R}_+$ y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = \exp$. Calcule $\int_0^a \exp(x) dx$ usando sumas de Riemann $s(f, P)$ y $S(f, P)$.
(b) Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$.
(c) Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$.
3. (a) ¿Existe la integral impropia $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$?
(b) Existe $\int_0^1 D(t) dt$, donde D es la función de Dirichlet

$$D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{si } t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4. Sean $\alpha, \beta, \gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \beta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad \gamma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Determine cuáles de las siguientes integrales $\int_{-1}^1 f d\alpha$, $\int_{-1}^1 f d\beta$, $\int_{-1}^1 f d\gamma$ existen y, en caso de existencia, calcule su valor si

- (a) f es continua en 0,
- (b) $f(0+) = f(0)$,
- (c) $f(0-) = f(0)$,