Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 12

Diferenciación; funciones exponenciales. Fecha de entrega: 10 de noviembre de 2017

---

1. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua y diferenciable en (a, b) con $f'(x) \neq 1$, $x \in (a, b)$. Muestre que existe exactamente un $p \in [a, b]$ con $f(p) = p$.

2. **Exponential functions.** Para $a \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ fijo se define la función

$$p_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad p_a(z) = \exp(z \ln(a)).$$

   (a) Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \mathbb{Q}$ muestre

$$p_a(q) = a^q. \tag{$*$}$$

   (b) Muestre que p_a es diferenciable y encuentre su derivada.

   Recall. Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$a^n := \prod_{n=1}^{n} a, \qquad a^0 := 1, \qquad a^{\frac{1}{n}} := \text{unique positive solution of } x^n = a.$$

   Entonces $a^q := \left((a^\sigma)^{\frac{1}{m}}\right)^n$ está definida para todos $q = \frac{\sigma n}{m} \in \mathbb{Q}$ con $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\sigma \in \{\pm 1\}$.

   Remark. Dada la identidad $(*)$ se define

$$a^z := \exp(z \ln(a)), \qquad a \in \mathbb{R}^+,\ z \in \mathbb{C}.$$

3. (a) **Darboux's Theorem.** Sea $\mathcal{D} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que para cada $q \in \mathbb{R}$ con

$$\inf\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\} \;<\; q \;<\; \sup\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\}.$$

   existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = q$.

   (b) Sea $\mathcal{D} = (a, b)$ un intervalo no vacío y $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con un mínimo aislado global en $x_0 \in \mathcal{D}$.
   ¿Existen $c, d \in (a, b)$ con $c < x_0 < d$ tales que $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c, x_0)$ y $f'(x) \geq 0$, si $x \in (x_0, d)$.

4. Halle los siguientes límites si existen:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}\right)$, (b) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^a$ con $x \in \mathbb{R}$,

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1 + \arctan x)^{1/x}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1 - x^a} - \frac{b}{1 - x^b}\right)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.