

Análisis

Taller 11

exp; diferenciación.

Fecha de entrega: 3 de noviembre de 2017

1. Muestre las siguientes propiedades de la función exponencial:

- (a) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, $z \in \mathbb{C}$,
- (b) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$, $z, w \in \mathbb{C}$,
- (c) $\exp(n) = e^n$, $n \in \mathbb{Z}$,
- (d) $\exp(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$,
- (e) $|\exp(ix)| = 1 \iff x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Muestre las siguientes identidades para $x, y \in \mathbb{C}$:

- (i) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
- (ii) $\sin(x + y) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x)$,
- (iii) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,

(b) Muestre que $\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\} \neq \emptyset$.

Sea $\pi := 2 \cdot \inf\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\}$.

(c) Para $x \in \mathbb{R}$ muestre:

- (i) $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi$.
- (ii) $\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Ayuda. Puede ser útil (probar y) usar

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x \in (0, 3].$$

3. Muestre que las siguientes funciones son diferenciables y encuentre sus derivadas. ¡Pruebe!

- (a) $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$,
- (b) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

4. Para $k \in \mathbb{N}$ defina $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Para cuáles k es f_k diferenciable? Para cuales k es f_k continuamente diferenciable?