# Análisis

Taller 8

Continuidad. Fecha de entrega: 13 de octubre de 2017

---

1. Para $j = 1, \ldots, n$ sea $(X_j, \|\cdot\|_j)$ un espacio normado sobre $\mathbb{F}$ donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
   (a) $(X_1 \times \cdots \times X_n, \|\cdot\|)$ con
   $$\|(x_1, \ldots, x_n)\| := \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$$
   es un espacio normedo sobre $\mathbb{F}$.
   (b) Muestre que para todo $j = 1, \ldots, n$ la proyección $\mathrm{pr}_j$ es continua donde
   $$\mathrm{pr}_j : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_j, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j.$$
   (c) Sea $V$ un espacio normedo, $f_j : V \to X_j$ y
   $$f = (f_1, \ldots, f_n) : V \to X_1 \times \cdots X_n, \qquad f(v) = (f_1(v), \ldots, f_n(v)).$$
   Muestre que $f$ es continua si y sólo si todas $f_j$ son continuas.

2. Criterio de Cauchy (Theorem 5.15):
   Sean $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ espacios métricos, $Y$ completo, $f : X \supseteq \mathcal{D} \to Y$ una función y $x_0$ un punto límite de $\mathcal{D}$. Entonces $f$ tiene un límite en $x_0$ si y sólo si
   $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in D_f :$$
   $$\Big(0 < d_X(x, x_0) < \delta \ \wedge\ 0 < d_X(y, x_0) < \delta \implies d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon\Big).$$

3. Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre que las siguientes funciones son continuas:
   $$S : X \to \mathbb{R}, \quad S(x) := \min\{f(x),\ g(x)\},$$
   $$T : X \to \mathbb{R}, \quad T(x) := \max\{f(x),\ g(x)\}.$$

4. Diga si la función $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ tiene una extensión continua a $[0, 1)$. En el caso afirmativo, encuéntrela.

---

*Ejercicios voluntarios*

---

1. Para $x \in (0, \infty)$ sea $[x]$ su parte entero, es decir, $[x] = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq x\}$. Determine si la siguiente serie converge:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$$

2. Diga dónde las siguientes funciones son continuas y dónde son discontinuas. Pruebe su afirmación.
   (a) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/q, & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{N} \text{ sin divisor común.} \end{cases}$
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

3. Encuentre una función $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tal que la restricción a cualquier intervalo $(a, b) \subseteq (0, 1)$ es no-acotada.