Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 4

Espacios normados; sucesiones. Fecha de entrega: 08 de septiembre de 2017

---

1. Sea $q \in \mathbb{R}_+$ y $x_n := \sqrt[n]{q},\ y_n := \sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}$. Convergen las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Si es así, encuentre el límite.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Muestre o encuentre un contraejemplo:

   (I) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$ tal que
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq N,$$
   luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (II) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q \leq 1$ tal que
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq N,$$
   luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Sea X un conjunto no vacío y sea
   $$L_\infty(X) = \Big\{ f : X \to \mathbb{R} \ :\ \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty \Big\}$$
   y para $f \in L_\infty(X)$ defina
   $$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$
   Demuestre que $(L_\infty(X),\ \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado.

4. (a) Sea $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Demuestre que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} c^j = \frac{1-c^{k+1}}{1-c}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ tal que exista un $c \in (0, 1)$ tal que
   $$d(f(x),\ f(y)) \leq cd(x,\ y), \qquad x, y \in X.$$
   Demuestre que existe exactamente un $z \in X$ tal que $f(z) = z$.