Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

25 de marzo de 2014

---

1. Sean $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ y sea la siguente sucesión:

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} \quad \text{para } n \geq 0.$$

Muestre que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y deduzca de ello que es convergente. Halle el límite de la sucesión.

2. Sea (X, d_X) un espacio métrico. Un subconjunto $U \subseteq X$ se dice *abierto* si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B_r^X(x) := \{z \in X : d_X(z, x) < r\} \subseteq U$. Esto es, todo punto de U tiene una vecindad propiamente contenida en U.

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función. Muestre que f es continua si y sólo si dado $U \subseteq Y$ abierto en Y, el conjunto $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto en X.

3. Suppose that for every $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$ and $a_n \geq 0$. Given that $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges, show that $\sum_{n=i}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converges.

4. (a) Let f_n be a sequence of continuous, real valued functions on $[0, 1]$ which converges uniformly to f. Prove that $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(\frac{1}{2})$ for any sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ which coverges to $\frac{1}{2}$.
   (b) Must the conclusion still hold if the convergence is only pointwise? Explain.

5. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una secuencia de números tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
Muestre que:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge.
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ converge.

6. Sean E un espacio métrico, F un espacio normado y A un subconjunto denso en E. Sea (f_n) una sucesión de mapas continuas y acotadas de E en F tal que la restricción de las funciones f_n en A forma una sucesión uniformemente convergente. Muestre que (f_n) es uniformemente convergente en E.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n},\ \gcd(m, n) = 1, n > 0. \end{cases}$$

Muestre que f es continua en los irracionales y discontinua en los racionales.

8. Si $s_1 = \sqrt{2}$ y $s_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{s_n}}$ para todo $n \geq 1$, pruebe que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y que $s_n < 2$ para $n \geq 1$.

9. If f is defined on E, the *graph* of f is the set of points $(x, f(x))$, for $x \in E$. In particular, if E is a set of real numbers, and f is real-valued, the graph of f is a subset of the plane. Suppose E is compact, and prove that f is continuous on E if and only if its graph is compact.

10. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ sucesiones tales que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ para $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Demuestre que para $m < n$, se tiene: $\dfrac{a_m}{r_m} + \cdots + \dfrac{a_n}{r_n} > 1 - \dfrac{r_n}{r_m}$.

    (b) Deduzca que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ diverge.

    (c) Demuestre que $\dfrac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_n + 1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (d) Demuestre a partir de la anterior desigualdad que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ converge.

11. Sea (X, d) un espacio métrico, y sean $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, sucesiones de Cauchy. Demuestre que la sucesión $(d(p_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

12. Sean (a_n), $(b_n) \subseteq \mathbb{R}$ sucesiones. Muestre que:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \tag{1}$$

    Ahora suponga que (a_n), (b_n) son positivas y acotadas, muestre que:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n) \tag{2}$$

13. (a) Muestre que si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty}(na_n) = l$ con $l > 0$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

    (b) Asuma $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = L > 0$ existe. Muestre $\sum a_n$ converge.

14. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y sea $\sigma_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. Probar que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

15. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

16. Sea $a_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Probar que la sucesión converge hacía un límite p con $1 < p < 2$.

17. Probar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1 donde

$$a_1 = -\frac{3}{2}, \quad 3a_{n+1} = 2 + a_n^3.$$

Modificar a_1 para que la sucesión converja a -2.

18. Muestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.