

# Análisis

## Taller 14

Regla de l'Hôpital; integración.

Fecha de entrega: 2 de Mayo 2014, 11 am

---

1. Halle los siguientes límites si existen:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$ ,      (b)  $\lim_{a \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{a} \right)^a$  con  $x \in \mathbb{R}$ ,  
(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{1/x}$ ,      (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right)$  con  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

2. Sea  $a \in \mathbb{R}_+$  y sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = \exp$ . Usando sumas de Riemann  $s(f, P)$  y  $S(f, P)$ , calcule  $\int_0^a \exp(x) dx$ .

3. (a) ¿Existe la integral impropia  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  ?

(b) Existe  $\int_0^1 D(t) dt$ , donde  $D$  es la función de Dirichlet

$$D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{si } t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4. (a) Encuentre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$ .

(b) Encuentre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$ .

---

*Ejercicio extra. En caso de entrega, será calificado pero no afectará la nota del taller.*

5. Sean  $-\infty < \alpha < \beta < \infty$  y  $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones derivables con  $g'(x) \neq 0$  en  $(\alpha, \beta)$

y  $\lim_{x \searrow \alpha} g(x) = \lim_{x \searrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ . Muestre que  $\lim_{x \searrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ .