Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 11

Convergencia de funciones. Fecha de entrega: 10 de abril 2014

---

1. Encuentre el radio de convergencia de

$$\text{i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^n}{n}\,, \qquad \text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n\,,$$

$$\text{iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-1)^n z^n\,, \qquad \text{iv)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n z^{3n}}{3^n}\,.$$

2. Muestre las siguientes propiedades de la función exponencial (Theorem 5.50):
   (a) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}, \quad z \in \mathbb{C},$
   (b) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad z, w \in \mathbb{C},$
   (c) $\exp(n) = \mathrm{e}^n, \quad n \in \mathbb{Z},$
   (d) $\exp(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{C},$
   (e) $|\exp(\mathrm{i}x)| = 1 \iff x \in \mathbb{R}.$

3. (a) Muestre las siguientes identidades para $x, y \in \mathbb{C}$:
      (i) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$
      (ii) $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x),$
      (iii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$

   (b) Muestre que $\{x \in \mathbb{R}_+ \,:\, \cos x = 0\} \neq \emptyset.$

   Sea $\pi := 2 \cdot \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \,:\, \cos x = 0\}.$

   (c) Para $x \in \mathbb{R}$ muestre:
      (i) $\sin x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi.$
      (ii) $\cos x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}.$

   Ayuda. Puede usar, sin probar, que:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \qquad x \in (0,3].$$

4. Muestre que las siguientes funciones son diferenciables y encuentre sus derivadas. ¡Prueba!
   (a) $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x},$
   (b) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$

   Hint. Prove Euler's formula (Theorem 5.51): (Theorem **??**): $\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z),\ z \in \mathbb{C}.$