Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 8

Convergencia de funciones. Fecha de entrega: 3 de abril 2014

---

1. ¿Convergen las siguientes sucesiones puntualmente? ¿Convergen uniformemente? Si convergen, encuentre la función límite.

   (a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$

   (b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx^2},$

   (c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2},$

   (d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1 + nx}.$

2. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ una sucesión que converge a 0. Define $f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = a_n f(x)$, $x \in \mathcal{D}$.

   (a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0$.

   (b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente si y sólo si f es acotada en $\mathcal{D}$.

3. Sean X un espacio métrico, Y un espacio normado y sean $f_n, g_n : X \to Y$ funciones que convergen uniformemente a f y g respectivamente.

   (a) Muestre que $f_n + g_n$ converge uniformemente.

   (b) ¿El producto $f_n \cdot g_n$ necesariamente converge uniformemente?

   (c) Sean X un espacio métrico compacto, $f_n : X \to \mathbb{R}$ funciones que convergen uniformemente a una función continua $f : X \to \mathbb{R}$. Suponga que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Demuestre que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq 0$ para todo $n > N$ y todo $x \in X$.
   Se puede concluir si X no es compacto?

4. Sean X un espacio métrico, Y un espacio de Banach y A un subconjunto *denso*[1] en X. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas y acotadas de X en Y tal que la restricción de las funciones f_n en A forma una sucesión uniformemente convergente. Muestre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en X.

---

[1] A se llama *denso* en X, si para todo $x \in X$ existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.